2021 兵庫県立大学（国際商経・社会情報科）[1] (1)

考え方

$48n+3$ とみたらとりあえず 3でくくってみたくなるはず.
つまり $3(16n+1)=m^2$　じゃあmは3の倍数だから $m=3k$ とおこう
$3(16n+1)=9k^2 \iff 16n+1=3k^2$　左辺は奇数、kが偶数なら右辺偶数になっちゃってX.
ならばkは奇数だから $k=2l+1$ とおこう
$16n+1=3(2l+1)^2=3(4l^2+4l+1)=12l^2+12l+3$
$8n=6l^2+6l+1=2(3l^2+3l)+1$　左辺：偶数　右辺：奇数　で　矛盾!!

解答.

$48n+3=m^2$ を満たす(m, n)があると仮定する.
$3(16n+1)=m^2$ より m^2は3の倍数であり、mも3の倍数である. よって $m=3k$（kは整数）とおける.
$3(16n+1)=9k^2 \iff 16n+1=3k^2$. 左辺は奇数であるから、右辺が奇数になるには、$k^2$が奇数でなければいけない.
よってkも奇数であり $k=2l+1$（lは整数）とおける.
$16n+1=3(2l+1)^2=3(4l^2+4l+1) \iff 8n=6l^2+6l+1$
$=2(3l^2+3l)+1$
左辺は偶数であるが、右辺は奇数であり矛盾. よって背理法により $48n+3=m^2$ を満たすm, nは存在しない ■

別解 考え方

平方数はmod 3, mod 4を考えると早いことがある.

(mod 3)

m	0	1	2
m^2	0	1	1

mod 3だと、(左辺)≡0. (右辺)が0になることがあるかというと.
ありえてしまう（$m\equiv 0 \pmod 3$のとき）
じゃあ次mod 4で考えよう

(mod 4)

m	0	1	2	3
m^2	0	1	0	1

(左辺)≡3. 右の表でみると $m^2\equiv 3$ にはならない.
→この方針でもいけそう!

別解 解法

(左辺)$=48n+3=4(12n)+3$ より 4で割ると3余る.
ここでmを4で割った余りによって場合分けする.
(i) $m=4k$（kは整数）のとき
　$m^2=16k^2=4(4k^2)$ で4で割ると余りは0.
(ii) $m=4k\pm1$（kは整数）のとき
　$m^2=(4k\pm1)^2=16k^2\pm8k+1=4(4k^2\pm2k)+1$（複号同順）となり4で割ると余りは1
(iii) $m=4k+2$（kは整数）のとき
　$m^2=4(2k+1)^2=4(4k^2+4k+1)$ で4で割ると余りは0.

(i)〜(iii)いずれの場合も、4で割った余りは一致しない. よって $48n+3=m^2$ を満たす整数(m, n)は
存在しない ■