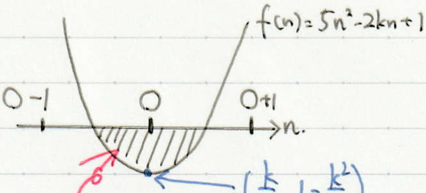
2008 一橋大学 [1]

考え方

二次関数として、グラフで考えたくなる。

右のようになってもらいたい。



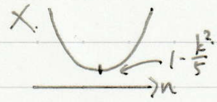
とりあえず頂点出したい。→平方完成

$f(n)=5n^2-2kn+1=5\left(n^2-\frac{2}{5}kn+\frac{k^2}{25}\right)-\frac{k^2}{5}+1$

$=5\left(n-\frac{k}{5}\right)^2+1-\frac{k^2}{5}$

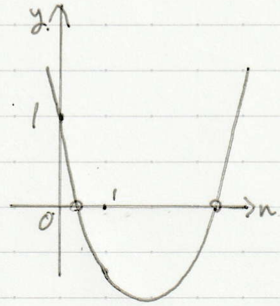
頂点は $\left(\frac{k}{5}, 1-\frac{k^2}{5}\right)$

↳ここがn軸より上だと、そもそも不等式を満たすことがない



$1-\frac{k^2}{5}<0$ $1<\frac{k^2}{5}$ $5<k^2$ ∴ $k<-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}<k$ kは正の整数だから

kは3以上の整数、ということがわかった。



ここからどうしよう … ⇒手が止まったら、とりあえず代入して実験

$f(0)=1$, $f(1)=5-2k+1=6-2k\leqq 0$ ($k\geqq 3$ のとき)

$f(2)=20-4k+1=-4k+21$

⋮

$n=1$ が $k\geqq 4$ のときは必ず負だから、不等式をみたす整数が $n=1$ ただ1つのみになるようにしたい ⇒ $f(2)\geqq 0$ を求めれば ok かな。

$k=3$ のときは、$f(1)=0$、元の式に代入すれば、よさそう。

解答

$f(x)=5x^2-2kx+1$ とおくと、$f(x)=5\left(x-\frac{k}{5}\right)^2+1-\frac{k^2}{5}$ とおける。

不等式 $f(x)<0$ を満たす実数xが存在するとき、$y=f(x)$ の頂点がx軸より下になければいけない。

その条件は、$1-\frac{k^2}{5}<0$ $\iff k^2>5$

$\iff k<-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}<k$ kは正の整数より $k\geqq 3$.

ここで $f(0)=1>0$, $f(1)=6-2k$ である。

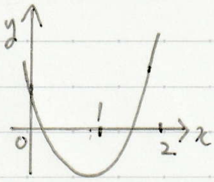
(i) $k=3$ のとき

$f(1)=0$ である。このとき $f(x)=5x^2-6x+1=(5x-1)(x-1)$ であり、$f(x)<0$ となるxの範囲は

$\frac{1}{5}<x<1$ である。このとき xは整数にならないため、$f(n)<0$ を満たす整数nは存在しない。

(ii) $k\geqq 4$ のとき

$f(1)=6-2k<0$ である。$f(n)<0$ となる整数nが1つだけであるための条件は、$f(2)\geqq 0$ である。$f(2)=-4k+21\geqq 0$ $4k\leqq 21$ $k\leqq\frac{21}{4}$



$4\leqq k\leqq\frac{21}{4}$ を満たすkは $k=4, 5$ である。

(i), (ii)より 求めるkの値は $k=4, 5$ である。