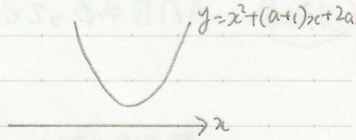
2020 鹿児島大学 [2]

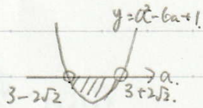
(1) 考え方

全てのxで $x^2+(a+1)x+2a>0$ が成り立つということは、
グラフでいうと右のようになるということ。
つまり判別式でいうと、判別式が負になるということ。



(1) 解答

2次方程式 $x^2+(a+1)x+2a=0$ の判別式を D_1 とすると、
$D_1=(a+1)^2-4\cdot 2a=a^2-6a+1$　D_1が負になれば、$y=x^2+(a+1)x+2a$のグラフはx軸と交点をもたず、
全ての実数xに対して、$x^2+(a+1)x+2a>0$ となる。



$D_1<0 \iff a^2-6a+1<0$
$\iff \underline{3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}}$,

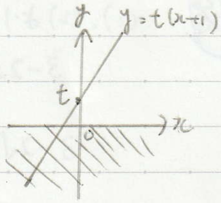
---

(2) 考え方

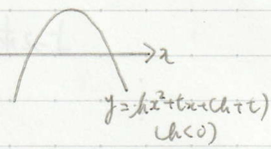
hの値によって $y=hx^2+tx+(h+t)$ のグラフの形状は異なります。
$h=0$だと、グラフは直線。$h>0$だと下に凸、$h<0$だと上に凸になります。
各々の場合で $y<0$ となるxがどんな値の時に存在するかを考えましょう

(2) 解答

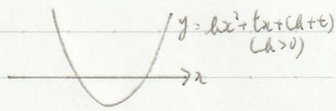
hの値によって場合分けする。　$y=hx^2+tx+(h+t)$ …① とおく。
$t>0$ のときに $y<0$ となるxが存在するかを考える。
(i) $h=0$のとき、①より $y=tx+t=t(x+1)$
例えば $x=-50$のとき　$t>0$より $y=t\times(-49)<0$ となり
$y<0$ となるxが存在した。

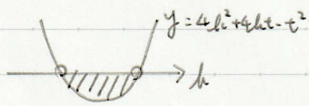


(ii) $h<0$のとき、放物線は上に凸となり、$y<0$となるxが存在する。



(iii) $h>0$のとき、$y<0$となるxが存在する条件は、
$hx^2+tx+(h+t)=0$ の判別式をD_2としたとき、
$D_2>0$ である。
$D_2=t^2-4h(h+t)=-4h^2-4ht+t^2>0$
$\iff 4h^2+4ht-t^2<0$
$\iff \dfrac{-4t-\sqrt{16t^2+16t^2}}{8}<h<\dfrac{-4t+\sqrt{16t^2+16t^2}}{8}$
$\iff \dfrac{-t-\sqrt{2}t}{2}<h<\dfrac{-t+\sqrt{2}t}{2}$ $(\because t>0)$





$t>0$より　$\dfrac{-t-\sqrt{2}t}{2}<0$ である。よって$h>0$より求める範囲は　$0<h<\dfrac{-t+\sqrt{2}t}{2}$ $\left(=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}t\right)$

(i)〜(iii)より求める範囲は、$\underline{h<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}t}$,