

2020 関西大学 (全学部日程・センター中期・理系) 4 (5)

考え方

単純に $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ と $n^3 - 2n + 2$ を割って余りが出た。
右のようになったから。

商: $n-1$ 余り: $-n+1$ だ!

→ X

今回 $n \geq 2$ の自然数だから、余りが負になっちゃう。

例えば、20 を 3 で割った余りを考えよ。

$$\bigcirc: 20 = 3 \times 6 + 2$$

$$\times: 20 = 3 \times 7 + (-1)$$

商 余り

じゃあ商が $n-1$ だと負になっちゃう。もうだけ足して。

$n-2$ だとどうなるの?

余りが $n^3 - 3n + 3$ になった

これは正? 負に落ちる?

→ 平方完成 (2つより)

$$n^3 - 3n + 3 = (n^2 - 3n + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + 3$$

$$= (n - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$

n の値によらず正。ということは余りは通らない。

$$\hookrightarrow (n-1)^3 = \underbrace{(n-2)}_{\text{商}} (n^3 - 2n + 2) + \underbrace{n^3 - 3n + 3}_{\text{余り}}$$

余りは $n^3 - 2n + 2$ で割りに対応してる?

$$n^3 - 3n + 3 = (n^3 - 2n + 2) \cdot 1 - n + 1$$

余りが負。じゃあ通らない

Point: 整数の割り算の余り

$$\square = \triangle \times (\text{商}) + (\text{余り})$$

余りの値は

0, 1, 2, ..., $\triangle - 1$ まであり。

負には落ちない。

解答

$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ であるから、計算しよう

$(n-1)^3 = (n-1)(n^2 - 2n + 2) + 1 - n$ とするが、 n が 2 以上の整数という条件より、 $1 - n < 0$ とす。
余りが負と割り不適。

$$\therefore (n-1)^3 = (n-2)(n^2 - 2n + 2) + n^2 - 2n + 2 + 1 - n$$

$$= (n-2)(n^2 - 2n + 2) + n^2 - 3n + 3 \quad \text{と、商を 1 だけ引くと。}$$

余りが $n^2 - 3n + 3$ とする。

$$n^2 - 3n + 3 = (n - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$

とす。 n の値によらず正に落ちる。

また、 $n^2 - 2n + 2 - (n^2 - 3n + 3) = n - 1 > 0$ ($\because n$ は 2 以上の整数) より $n^2 - 2n + 2 > n^2 - 3n + 3$ であるから、 n 以上 $n^2 - 2n + 2$ で割るとはできず、

$$\text{よって 商: } n-2 \text{ ⑦} \quad \text{余り: } n^2 - 3n + 3 \text{ ⑧} \quad \text{とす}$$