No.

Date

2016 岡山県立大学（情報工学部）$\boxed{3}$(2)

考え方

まずは次数下げを考える。$x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x^2=4x-1$ と 2次 ⇒ 1次に次数を下げられる

$x^3=x\cdot x^2=x(4x-1)=4x^2-x=4(4x-1)-x=15x-4$

じゃあ $x^3+\frac{1}{x^3}=15x-4+\frac{1}{15x-4}$　　$x^2-4x+1=0$ の xの値は $x=-2\pm\sqrt{3}$ だから代入して…

とやるとドツボにはまる。

○$+\frac{1}{○}$ の形は対称式っぽい形だから、対称式っぽく $x+\frac{1}{x}$ を求めてしまおう

$x^2-4x+1=0$　両辺をxで割って、$x-4+\frac{1}{x}=0$　∴ $x+\frac{1}{x}=4$

（※ $x\neq0$ を必ず確認）

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$ から求められそう！

また $x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ で、

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ から求められそう

つまり $x=A$、$\frac{1}{x}=B$ とおくと、$A^3+B^3=(A+B)^3-3(A+B)AB$

$A^5+B^5=(A^3+B^3)(A^2+B^2)-(AB)^2(A+B)$ みたいなこと。

Point 対称式について

○$+\frac{1}{○}$ の形は、

○$=X$、$\frac{1}{○}=Y$ として、

$XY=1$　$X+Y=?$ の形になる。

解答

$x^2-4x+1=0$ の解は $x=0$ でないため、両辺をxで割って、$x-4+\frac{1}{x}=0$ すなわち $x+\frac{1}{x}=4$ …①

である。$x\cdot\frac{1}{x}=1$ であることから、

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot1=4^3-3\cdot4=64-12=\underline{52}$ //

また、$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ であり

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot1=16-2=14$ から、

$x^5+\frac{1}{x^5}=52\cdot14-4=\underline{724}$ //

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times\,14 \\ \hline 208 \\ 52 \\ \hline 728 \end{array}$$