2011 島根大学（教育・生物資源科学部）[2]

(1) 考え方. 2次方程式 $x^2+2ax+(a-1)=0$ の解が α,β ということは、$x^2+2ax+(a-1)=(x-\alpha)(x-\beta)$
$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ ということ。

2次方程式が異なる2つの実数解をもつ ⟺ 判別式 $D>0$

$D/4=a^2-(a-1)=a^2-a+1$ これが >0 であることを示せばよい。

(1) 解答 $x^2+2ax+(a-1)=0$ の判別式を D とすると
$D/4=a^2-(a-1)=a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ であり、判別式 $D>0$ であるから
2次方程式は相異なる2実解をもつ。よって $\alpha\neq\beta$ である。■

(2) 考え方. 解と係数の関係から $\begin{cases}\alpha+\beta=-2a\\ \alpha\beta=a-1\end{cases}$

仮に $\alpha\geqq0,\ \beta\geqq0$ とすると、$\alpha+\beta\geqq0$ よって $-2a\geqq0$ つまり $a\leqq0$
$\alpha\beta\geqq0$ よって $a-1\geqq0,\ a\geqq1$ ここで矛盾。

Point 解と係数の関係
$x^2+○x+△=0$ の解が $x=\alpha,\ x=\beta$ とすると $\begin{cases}\alpha+\beta=-○\\ \alpha\beta=△\end{cases}$

(2) 解答 解と係数の関係より $\begin{cases}\alpha+\beta=-2a & \text{―①}\\ \alpha\beta=a-1 & \text{―②}\end{cases}$ が成り立つ。

$\alpha\geqq0,\ \beta\geqq0$ とすると ①より $\alpha+\beta=-2a\geqq0$ すなわち $a\leqq0$
②より $\alpha\beta=a-1\geqq0$ すなわち $a\geqq1$

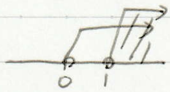
$a\leqq0$ と $a\geqq1$ を同時に満たす実数 a は存在しない。よって背理法により α,β の少なくとも1つは負である。■

(3) 考え方 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ が分かっていて $\alpha^2+\beta^2$ を求めたい ⇒ 対称式を使う

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=4a^2-2(a-1)=4a^2-2a+2=4\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{4}+2$
$=4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}$

あとは a のハンイの絞りこみを、使ってない条件 $\alpha\leqq0,\ \beta\leqq0$ を使って決める。

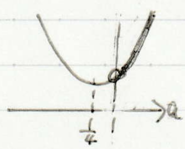
①から $\alpha+\beta=-2a\leqq0$ ∴ $a\geqq0$
②から $\alpha\beta=a-1\geqq0$ ∴ $a\geqq1$



あとはグラフ

(3) 解答 $\alpha\leqq0,\ \beta\leqq0$ より ①から $\alpha+\beta=-2a\leqq0$ ∴ $a\geqq0$
②から $\alpha\beta=a-1\geqq0$ ∴ $a\geqq1$ 2つの共通範囲は $a\geqq1$

ここで $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4a^2-2a+2$
$=4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}$ より



$a\geqq1$ の範囲では $a=1$ で最小値4をとる。