2015 早稲田大学 政治経済学部 [1]

(1) 考え方　$y=ax^2+bx+c$ が $(a,b),(b,c),(c,a)$ を通る
⇒グラフの概形などを考える前に値を代入してみよう

$$\begin{cases} b=a^3+ab+c \\ c=ab^2+b^2+c \\ a=c^2a+bc+c \end{cases}$$

→ こいつから $ab^2+b^2=0$ が分かるから $b^2(a+1)=0$
$b\neq0$ より $a=-1$

(1) 解答　$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと、3点を通ることから

$$\begin{cases} b=a^3+ab+c & \text{—①} \\ c=ab^2+b^2+c & \text{—②} \\ a=c^2a+bc+c & \text{—③} \end{cases}$$

とおける。

②より $ab^2+b^2=0 \iff b^2(a+1)=0$
$b\neq0$ より $a+1=0$
すなわち $a=-1$

---

(2) 考え方　(1)で使っていない①③に $a=-1$ を代入してみる。

① ⇒ $b=-1-b+c \iff 2b-c=-1 \iff b=\frac{c-1}{2}$ —④
③ ⇒ $-1=-c^2+bc+c \iff c^2-c(b+1)=1$
↳ bを消去し、cの式にする。

$$c^2-c\left(\frac{c-1+2}{2}\right)-1=0$$
$$\iff c^2-\frac{c^2+c}{2}-1=0 \iff 2c^2-c^2-c-2=0$$
$$\iff c^2-c-2=0$$
$$\iff (c+1)(c-2)=0$$

$c=-1,2$ これを④に入れて、
$abc\neq0$ をみたすかチェックすればok.

(2) 解答　(1)より $a=-1$ であるから、①より $b=-1-b+c \iff b=\frac{c-1}{2}$ …④
③より $-1=-c^2+bc+c \iff c^2-c(b+1)=1$
④を代入し、$c^2-c-2=0 \iff (c+1)(c-2)=0 \iff c=-1,2.$

(i) $c=-1$ のとき　④より $b=-1$　これは 3点が相異なるという条件より不適.

(ii) $c=2$ のとき　④より $b=\frac{1}{2}$　このとき $abc\neq0$, 3点が相異なるという条件を満たす

よって $(b,c)=\left(\frac{1}{2},2\right)$